čtvrtek 14. ledna 2021 1:35

(1) (c) (i) podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $c \in (1,2)$, že $f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 6 > 0$

(ii) podle Darbouxovy věty pro $C([a,b])$ existuje $z \in (1,2)$, že $f(1) < f(z) < f(2)$. Pak už stačí jako v předchozím kroku použít Lagrangeovu větu na intervalech $[1,z]$ a $[z,2]$.

(iii) Použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě s $g(x)=x^2$ $(g'(x)=2x)$ ta dává existenci $c \in (1,2)$, že

$$f'(c)\left(g(b)-g(a)\right) = g'(c)\left(f(b)-f(a)\right)$$

a tedy $f'(c)\cdot(2^2-1^2) = 2c(13-7)$,

což upravíme na $f'(c)=4c$.

(2) (c) (i) nechť D má dělicí body $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, potom

$$s(g,D) = \sum_k \inf_{[x_k, x_{k+1}]} g \cdot (x_{k+1} - x_k) \underset{g \le f}{\le} \sum_k \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - x_k) = s(f,D)$$

(ii) podle definice je $\underline{\int_{-3}^{3}} f$ horní závora množiny $\{s(f,D),\ D \in \mathcal{D}([-3,3])\}$. Tedy podle (i)

$s(g,D) \le s(f,D) \le \underline{\int_{-3}^{3}} f$ a tedy

$\underline{\int_{-3}^{3}} f$ je horní závora $\{s(g,D) : D \in \mathcal{D}([-3,3])\}$

a $\underline{\int_{-3}^{3}} g = \sup\{s(g,D) : D \in \mathcal{D}([-3,3])\} \le \underline{\int_{-3}^{3}} f$.

(iii) platí: nechť $D \in \mathcal{D}([-3,3])$, stačí ukázat $s(f,D) \le 0$.

Nechť $-3 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 3$ jsou dělicí body D

a nechť D^* je dělení s dělicími body

$0, x_0, \dots, x_n$ a $-x_1, \dots, -x_{n-1}$.

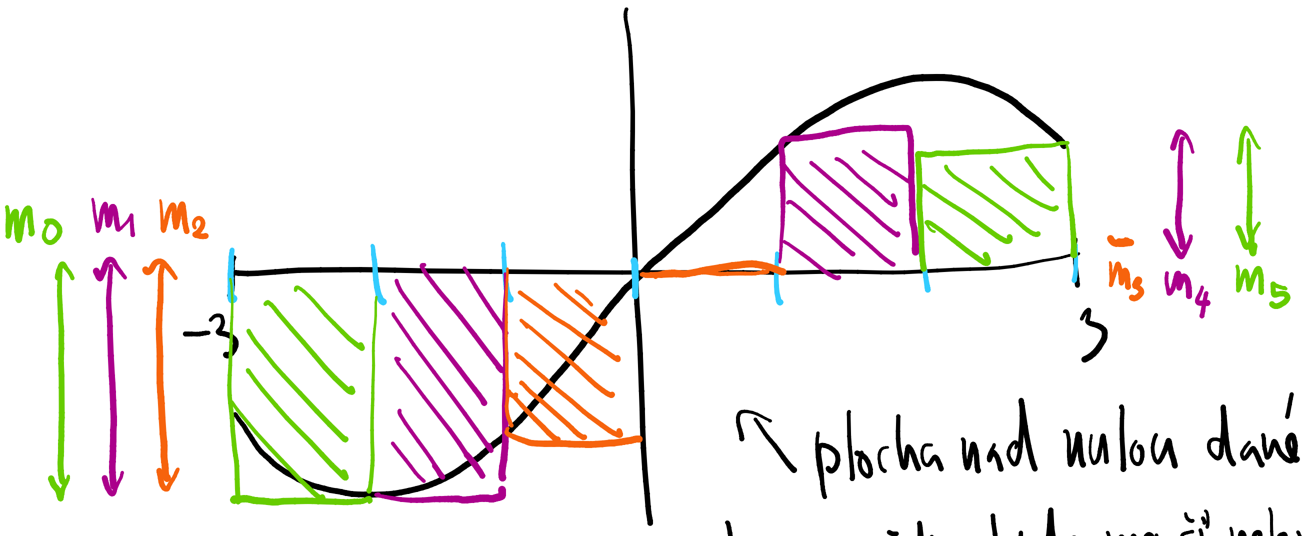
Přeznačme je na $-3 = y_0 < y_1 < \dots < y_{2m} = 3$

Platí $y_k = -y_{2m-k}$, $k = 0, \dots, 2m$ a

$$s(f,D) = \sum_{k=0}^{2m-1} m_k (y_{k+1} - y_k) \le \sum_{k=0}^{m} (m_k + m_{2m-1-k})(y_{k+1} - y_k)$$

protože $m_k + m_{2m-k} \le 0$ kvůli sudosti

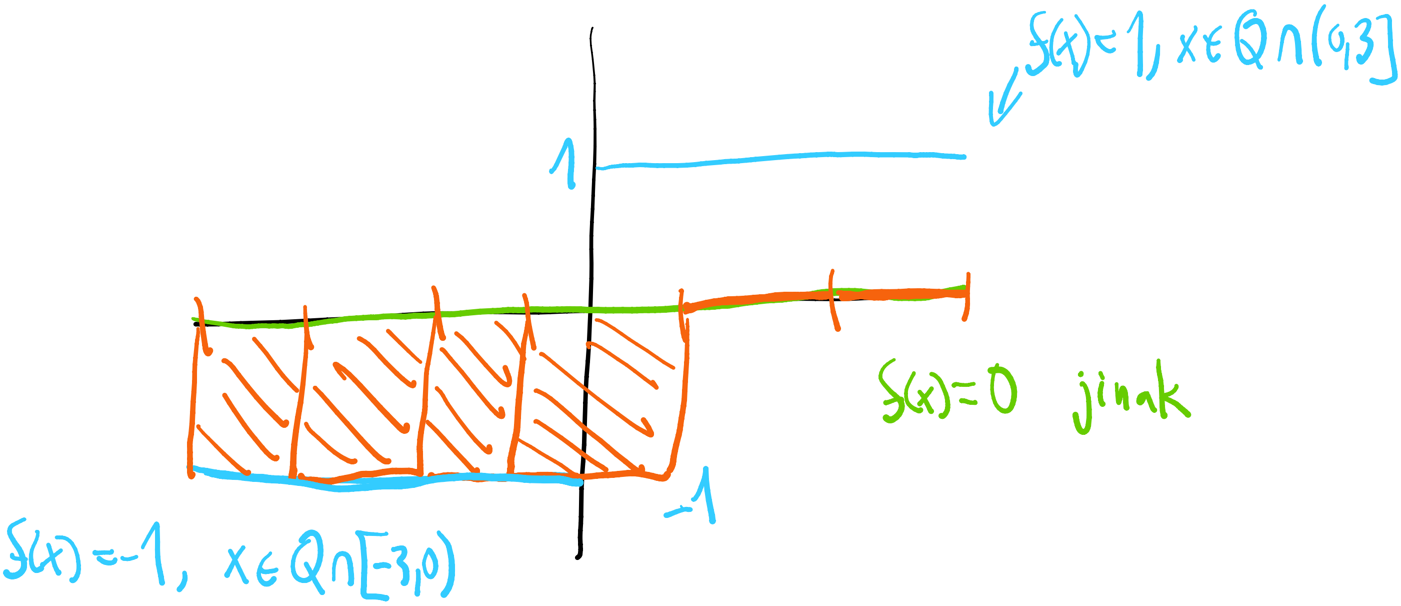
Snadno lze shrnout obrázkem



plocha nad nulou dané barvy vždy bude menší nebo rovna ploše stejné barvy pod nulou.

(iv) neplatí stačí uvážit funkci $f(x)=\operatorname{sgn} x \cdot d(x)$, kde $d(x)$ je Dirichletova funkce. Potom

$$s(f,D) \le -3 \, , \quad D \in \mathcal{D}([-3,3]).$$



(v) platí, podle (iii) platí $\underline{\int_{-3}^{3}} f \le 0$,

a analogicky $\overline{\int_{-3}^{3}} f \ge 0$. Protože je f spojitá na $[-3,3]$, platí

$$0 \le \overline{\int_{-3}^{3}} f = \underline{\int_{-3}^{3}} f \le 0,$$ což stačí.

(vi) plyne okamžitě z (ii) a (v).

(3) (b) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{f(x) - f'(6)(x-6) - f(x)}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6} - f'(6)\right)$

$= f'(6) - f'(6) = 0$

(c) (i) neplatí, stačí uvážit

$f(x) = x-1,\ g(x) = \sin(x-1),\ \varphi(x) = 1-x,\ \psi(x) = 1-x,$

potom $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)+\psi(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{0}{\sin(x-1)+1-x} = 0$

(ii) platí: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\psi(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$

(iii) platí: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\frac{g(x)}{\psi(x)}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(iv) neplatí: stačí uvážit $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, potom

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1$, ale $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{1} = 2$

(v)

platí: $$\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{G(x)-G(1)} = \lim_{x\to 1} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{g(x)} = 1$$

podle l'Hospitalova pravidla, používáme fakt, že F a G jsou spojité, a tedy jde o limitu "$\frac{0}{0}$".